

## 14 大家一起來尋寶

歷史學家無意中發現一則一千多年前發生的慘劇。那時一位大富翁擁有一座圓形的金銀島，他的墳墓就在這座金銀島的海邊被發現。從這墳墓出土的札記中，記載著這樣的故事：富翁將他所有的金銀財寶平均的藏在該島的某兩處海邊。富翁卻欺騙他的兩個孩子說：所有金銀財寶藏被三等分之後，藏在該島的三處海邊。這三處海邊的詳細地點只有富翁及他的兩個孩子才知道。

在夜黑風高的某一晚上，富翁的兩個孩子，同一時間分別從富翁真正藏寶的兩處海邊直奔富翁所謊稱的第三處海邊。富翁的大兒子先抵達第三處海邊，沒發現金銀財寶之後，馬上直奔另一處海邊。不幸的事情發生了，當兩個孩子在半路上相遇時，由於互相猜忌對方拿了第三處海邊的金銀財寶，導致互相殘殺。最後兩個孩子都死在遭遇的地方，富翁就將他們合葬在互相殘殺的地方。過了不久之後，富翁也因此鬱鬱而終，富翁死亡前說的最後一句話是“我兩個孩子的腳程一樣快，我的墳墓會距離真正藏金銀財寶的兩處海邊一樣遠”。

一千多年後的今天，我們只發現富翁及他兒子的墳墓所在地，你能根據這記錄找回富翁的金銀財寶嗎？

【參考解答】設富翁在海邊的墳墓為  $F$  點，兩個孩子合葬在  $B$  點，且令通過  $F$  點的直徑交圓形金銀島於另一處海邊  $F'$  點。連接線段  $FB$ ，過  $B$  點作線段  $\overline{GG_1} \perp \overline{FB}$ ，其中  $G, G_1$  為圓形金銀島的海邊且  $\overline{GB} < \overline{G_1B}$ 。在金銀島的海邊上取一點  $G_2$  滿足  $\overline{G_1F} = \overline{G_2F}$ 。同理，針對  $F', B$  點，亦可得到兩點  $G_3$  及  $G_4$ 。由習題 14.2 知道：金銀財寶的埋藏地不是  $G_1, G_2$  海邊，就是  $G_3, G_4$  海邊。

習題 14.1 據說，古代中國有一座很高的寶塔，後來因地震而傾倒。寶塔的東邊及西邊不遠處各有一處密窟(東邊的密窟距離寶塔比較近)，專門收藏信徒喜捨的金

銀財寶。古書記載說：寶塔原來的高度是東、西密窟距離的五分之一，且從東、西密窟仰望寶塔的仰角和恰好是四十五度。

目前考古學家只發現：已經傾倒的寶塔遺址及東邊的密窟。你能幫考古學家找到西邊密窟的所在地嗎？

習題14.2 三角形 $\triangle ABC$ ，已知線段 $AB < 線段 BC$ ， $\triangle ABC$ 的外接圓被線段 $AC$ 切成兩個弧，含 $B$ 點那弧的中點為 $M$ 。若由 $M$ 作線段 $BC$ 的垂線，交線段 $BC$ 於 $P$ 點，則證明：線段 $AB + 線段 BP = 線段 PC$ 。

習題 14.3 一本埃及古籍記載著一位法老王的故事。這位法老王擁有兩座王宮，一座位在一大片正方形沙漠的北邊；另一座位在此沙漠的東邊(王宮在沙漠外)。兩座王宮分別與方形沙漠上最靠近它們的兩個頂點構成兩個直角三角形，而王宮所在的位置剛好都是直角。

法老王對位於北邊王宮的信徒們開示說：每月月圓時，必須從王宮出發，朝方沙漠方向苦行，橫過酷熱的方形沙漠，而且必須完全依照這個直角三角形的角平分線方向而行，不能有任何偏差。

法老王也對於東邊王宮的信徒們開示說：每月月圓時，必須從王宮出發，朝某個固定的方向，像方形沙漠苦行，橫過整個沙漠。信徒們心裡都很清楚，這條路線剛好將整個方形沙漠的面積二等分。

法老王圓寂之前，交代信徒們必須將其肉身製成木乃伊，並陪葬許多金銀財寶，而埋葬的地點就是信徒們苦行兩條路線的交點。

從出土的地圖來看，方形沙漠地的四個頂點標示得非常清楚，但是法老王的兩座王宮及墳墓的位置已經不可考了。你能找到法老王的木乃伊及大批的金銀財寶嗎？

1997.10.23 花蓮

習題 14.4 古希臘數學家丟番圖被譽為代數學的鼻祖，但他的生平事蹟並沒有被記載下

來。有一本大約是四世紀時候的希臘詩文選集上有一首短詩，敘述了他的生平：“他的生活中，童年佔去六分之一，又過了十二分之一長出鬍鬚，在過了七分之一他結了婚，五年之後生下兒子，但是兒子的壽命只有他的一半，在兒子死後四年，他也過世了”。你能根據這首短詩推得丟番圖的年紀嗎？

習題 14.5 傳說蒙古大沙漠上有兩處綠洲，商人為了便於找到綠洲所在地，在沙漠上建立三處觀測站  $A, B, C$ 。分別以  $AB, AC$  為邊長向三角形  $ABC$  的外側作正方形，正方形的中心位置剛好是兩處綠洲的位置。如今地圖上僅知道一處綠洲的位置及觀測站  $B$  與觀測站  $C$  的中點。你是否可以據此找到第二處綠洲的位置。

習題 14.6 西藏高原上有一塊直徑十公里的圓形平原，圓形平原上有兩條通過平原中心的道路。此兩條道路與圓形平原邊緣的四個交叉點，據說藏有許多金佛像、唐卡及一本預言西藏苦難即將來臨，達賴十四世將出走天竺的經書，書中並有如何突破僵局的開示。達賴六世在圓形平原邊緣上建立一座宏偉的寺廟。每天寺廟上的男僧必須以垂直道路的方向，向道路仆倒前進；女尼則以垂直另一道路的方向，向道路仆倒前進，直到到達道路時方能休息。由於時代過於久遠，達賴六世所建的寺廟早已不見了，兩條道路中的一條也消失了。藏書上記載著說：男僧與女尼在道路上休息的地點相距有四公里之遠。你能幫達賴十四世找到這本開示的經書嗎？

習題 14.7 一位海盜想將一批珠寶埋藏在一個小島上。起先他在這小島的岸邊找到兩塊明顯的大石頭(標記為  $A$  與  $B$  點)，並將島上的某三棵大王椰子樹標記為  $C_1, C_2$  及  $C_3$ 。針對大王椰子樹  $C_1$ ，他找到兩個點  $A_1, B_1$ ，其中  $A_1C_1A, B_1C_1B$  都是等腰直角三角形(直角都是在  $C_1$  點)，而且  $\angle A_1C_1B, \angle B_1C_1A$  都是鈍角。海盜將  $A_1B$  與

$B_1A$  的交點記為  $P_1$ 。同樣針對大王椰子樹  $C_2, C_3$ ，海盜找到兩個點  $P_2, P_3$ 。海盜就將珠寶埋藏在  $P_1, P_2, P_3$  的外接圓圓心上。

過了幾年之後，海盜返回這個小島，發現颱風將所有的大王椰子樹都吹倒了。試問海盜要如何找回他的那批珠寶？

習題 14.8 埃及一座古老的金字塔的石碑上刻有係數不很清楚的多項式：

$$f(x) = x^3 + \nabla x^2 + \Delta x - 1,$$

僅知道  $\Delta$  為負整數， $\nabla$  是正整數。石碑上記載說：金字塔是由一位精通三角學的數學家所設計，僅有少數幾個方向才能進入金字塔。數學家的手札上有一段話：如果方向角  $\theta$  是可以進入金字塔的方向，那麼  $\theta$  所產生的三角函數值  $2\cos\theta$  會是方程式  $f(x)=0$  的一個根。

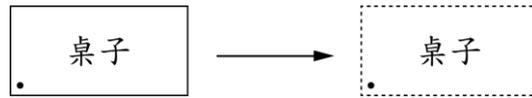
有一則流傳很久的傳說：數學家在建好金字塔之後，將四個不相同的整數密碼告訴掌管此金字塔的四位負責人，而且數學家在臨終時告訴他們：你們掌管的四個密碼很重要，千萬不可以告訴任何人，因為這四個密碼代入石碑上的多項式時，所產生的值不是 1 就是 -1。這四位負責人一直到死都不曾透露過密碼的數字。

你有辦法到金字塔一遊嗎？

1998.10.28 師大分部

### 動手玩數學

如下圖：一個左下角有黑點且長寬比為 2:1 的桌子（實線的長方形）放在平面上。每次移動只能固定一個桌腳做順時鐘九十度、一百八十度或兩百七十度的旋轉，不同的移動可以固定不同的桌腳。是否在經過有限次的移動之後，桌子會移到虛線的位置（即將原桌子向右平移 2 個桌子的長度）。



如果是將原桌子向右平移 $1\frac{1}{2}$ 個桌子的長度，是否可以辦到。

### 挑戰題

一張古老的藏寶圖上透露著大批金銀財寶所在的位置。藏寶圖上有文字敘述及地圖兩部份。地圖上標有  $A, B, C$  三點，文字敘述則是教你如何利用此三點找到金銀財寶的位置。文字敘述部份是這樣的：

“首先，從地圖的  $A$  點向  $B$  點的方向前進，當走到  $B$  點時，向左轉九十度並繼續前進。直到轉彎之後所走的距離與轉彎之前所走的距離一樣時，才停下來；並將那點標記為  $D$  點。其次，從地圖的  $A$  點向  $C$  點的方向前進，當走到  $C$  點時，向右轉九十度並繼續前進。直到轉彎之後所走的距離與轉彎之前所走的距離一樣時，才停下來；並將那點標記為  $E$  點。金銀財寶就藏在  $D$  點與  $E$  點連線的中點上。”

無奈的是，藏寶圖年代過於久遠，地圖上  $A$  點的位置已經不見了， $B, C$  兩點在藏寶圖上的位置還算清楚，只不過  $B, C$  兩個字太過模糊，分不清楚誰是  $B$  點，誰是  $C$  點了。你能找到金銀財寶所在的位置嗎？